Transformations du plan

I – Rappels : les transformations connues

Transformer une figure par une …	C'est créer l'image de cette figure ...
• **symétrie axiale**	par rapport à un axe de symétrie (*effet miroir*)
• **symétrie centrale**	par rapport à un centre de symétrie (*effet demi-tour*)
• **translation**	selon une direction, un sens et une longueur (*effet de glissement*).
• **rotation**	selon un centre , un angle et un sens de rotation(*effet « manège »*).

II – Homothétie

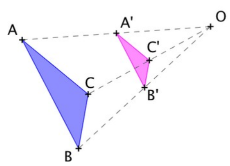
a) Définitions

Une homothétie est définie par :

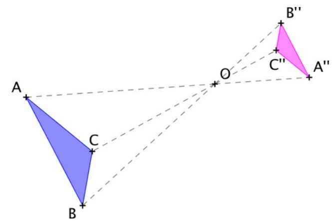
- un centre
- un rapport (un coefficient)

- Si $k > 0$, la figure et son image sont « du même côté » du centre.
  Si $k < 0$, la figure et son image sont « de part et d'autre » du centre.
- Si $k > 1$ ou $k < -1$, l'homothétie correspond à un agrandissement.
  Si $0 < k < 1$ ou $-1 < k < 0$, l'homothétie correspond à une réduction.
- Un point, son image et le centre sont alignés.

Le triangle A'B'C' est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport 0,5.

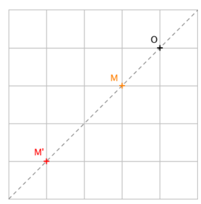


Le triangle A''B''C'' est l'image du triangle ABC par l'homothétie de centre O et de rapport – 0,5.

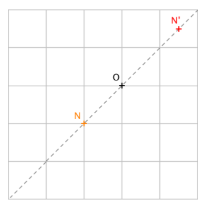


b) Construction

• Construisons M' l'image du point M par l'homothétie de centre O et de rapport 3.
Ici, $k > 0$ donc M' est sur la demi-droite [OM)
et $k = 3$ donc OM' = 3 × OM.



• Construisons N' l'image du point N par l'homothétie de centre O et de rapport – 1,5.
Ici, $k < 0$ donc N' est sur la droite (ON)
mais pas sur la demi-droite [ON)
et k = – 1,5 donc ON' = 1,5 × ON.



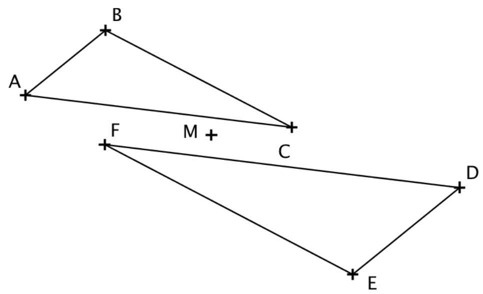
c) Propriétés

On considère une homothétie de rapport k ($k > 0$). Pour l'image de la figure :

- les longueurs sont multipliées par k ;
- les aires sont alors multipliées par k^2.
- les volumes sont multipliés par k^3.

- **Trouver le coefficient**

On considère deux triangles ABC et DEF tels que DEF est l'image de ABC par une homothétie de centre M et qui transforme A en D, B en E et C en F.
On donne : AB = 6 et DE = 8.



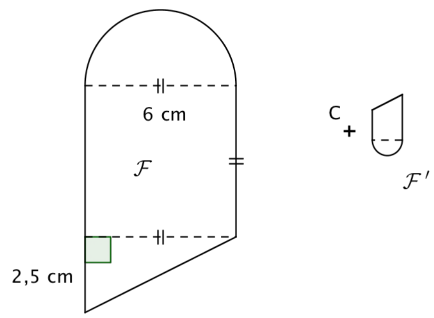
Déterminer le coefficient de l'homothétie.

- A et D sont de part et d'autre de M, donc le coefficient est négatif.
- DEF est plus grand que ABC, donc le coefficient est plus petit que – 1.
- $\dfrac{DE}{AB} = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$

Donc, le coefficient de l'homothétie est de $-\dfrac{4}{3}$.

- **Calcul de longueurs**

On considère une homothétie de centre C et de rapport – 0,2.
Déterminer l'aire de la figure $\mathcal{F}$'. Si nécessaire, arrondir au centième.



- Aire de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{A} = \pi\, r^2 : 2 \;+\; c^2 \;+\; L \times l : 2$
$\mathcal{A} = \pi \times 3^2 : 2 + 6^2 + 6 \times 2{,}5 : 2$
$\mathcal{A} = 4{,}5\pi + 43{,}5$
L'aire de $\mathcal{F}$ est de $4{,}5\pi + 43{,}5$ cm².

- Aire de $\mathcal{F}$'.

$\mathcal{A}' = \mathcal{A} \times 0{,}2^2$
$\mathcal{A}' = (4{,}5\pi + 43{,}5) \times 0{,}2^2$
$\mathcal{A}' \approx 2{,}31$
L'aire de F' est d'environ 2,31 cm².