Arithmétique

ATTENTION, ce chapitre s'intéresse exclusivement aux nombres entiers positifs.

I – Multiples, diviseurs et nombres premiers

a) Multiples et diviseurs

On dit que b est **un diviseur** de a si le reste de la division euclidienne de a par b est nul.

On peut alors aussi dire que :

- a est **divisible** par b .
- a est **un multiple** de b .

Il faut connaître les critères de divisibilité par 2 ; par 3 ; par 4 ; par 5 ; par 9 et par 10.

b) Nombres premiers et diviseurs communs

Un **nombre premier** est un entier naturel qui admet exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.

Les nombres premiers entre 1 et 100 :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

- On appelle PPCM le Plus Petit Commun Multiple de deux nombres entiers positifs.
- On appelle PGCD le Plus Grand Commun Diviseur de deux nombres entiers positifs.
- Deux nombres entiers positifs sont dits **premiers entre eux** si leur seul diviseur commun est 1.

Soit a et b deux nombres entiers positifs et p est leur PGCD. Alors, il existe deux nombres c et d tels que :

- $a = c \times p$ et $b = d \times p$
- et ces deux nombres c et d sont premiers entre eux

Preuve (démonstration par l'absurde)

Si c et d ne sont pas premiers entre eux, alors leur PGCD p' est différent de 1 et on peut écrire :

$$c = c' \times p' \text{ et } d = d' \times p' .$$

Autrement dit : $a = c' \times (p \times p')$ et $b = d' \times (p \times p')$.

Dans ce cas, le PGCD de a et b est $(p \times p')$ et non p . Ceci est contradictoire avec l'énoncé.

Donc notre supposition de départ est fautive. Par conséquent, c et d sont bien premiers entre eux.

CQFD

II – Décomposition et usages

On peut toujours décomposer un nombre non premier en un unique produit de facteurs premiers.

Soient a et b deux entiers, $b \neq 0$. On dit que la **fraction** $\frac{a}{b}$ est **irréductible** si on ne peut pas la simplifier.

- Si le numérateur et le dénominateur d'une fraction sont premiers entre eux, alors elle est irréductible.
- Pour rendre une fraction irréductible, on la simplifie par le PGCD du numérateur et du dénominateur.

Simplifier la fraction $\frac{525}{126}$.

- Décomposition en facteurs premiers de 525 et 126 :
 $525 = 5 \times 105$
 $= 5 \times 5 \times 21$
 $= 5 \times 5 \times 3 \times 7$
 $= 3 \times 5 \times 5 \times 7$
 $126 = 2 \times 63$
 $= 2 \times 7 \times 9$
 $= 2 \times 7 \times 3 \times 3$
 $= 2 \times 3 \times 3 \times 7$
- Simplification : $\frac{3 \times 5 \times 5 \times 7}{2 \times 3 \times 3 \times 7} = \frac{25}{6}$

Usage du PGCD

Un pâtissier dispose de 144 fraises et 120 framboises. Il veut faire un maximum de tartelettes toutes identiques en utilisant tous ses fruits.

➤ Combien de tartelettes pourra-t-il faire ? Quelle sera alors leur composition ?

$$144 = 12 \times 12 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 2 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3$$

$$120 = 12 \times 10 = 2 \times 2 \times 3 \times 2 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5$$

Le plus grand diviseur commun est donc $2 \times 2 \times 2 \times 3 = 24$.

Donc, le pâtissier pourra faire 24 tartelettes, chacune sera composée de 6 fraises et de 5 framboises.

Usage du PPCM

Calculer $A = \frac{4}{315} + \frac{2}{525}$ et donner le résultat sous forme irréductible.

On cherche le plus petit dénominateur commun : $315 = 3 \times 3 \times 5 \times 7$ et $525 = 3 \times 5 \times 5 \times 7$

Les facteurs non communs sont 3 et 5. Le PPCM est donc 315×5 (ou 525×3). Ainsi :

$$A = \frac{4}{315} + \frac{2}{525}$$

$$A = \frac{20}{1575} + \frac{6}{1575}$$

$$A = \frac{26}{1575}$$

De plus $26 = 2 \times 13$; $1575 = 3 \times 3 \times 5 \times 5 \times 7$. La fraction est irréductible.