Pythagore

I – Nombre au carré et calculatrice

On appelle racine carrée du nombre positif n, le nombre dont le carré est égal à n. On note ce nombre : $\sqrt{n}$.

- La racine carrée de 100 est 10 car $10^2 = 100$, on écrit $\sqrt{100} = 10$
- $\sqrt{25} = 5$ car $5^2 = 25$
- Usage de la calculatrice avec la touche $\sqrt{}$, trouvons les racines carrées suivantes.
  Eventuellement, arrondir à 0,001 près.
  $\sqrt{169} = 13$ $\quad$ $\sqrt{62500} = 250$ $\quad$ $\sqrt{60} \simeq 7{,}746$ $\quad$ $\sqrt{0{,}49} = 0{,}7$

On appelle carré parfait l'ensemble des nombres entiers positifs dont la racine carrée est un entier.

- Les carrés parfaits à connaître sont :
  1 ; 4 ; 9 ; 16 ; 25 ; 36 ; 49 ; 64 ;
  81 ; 100 ; 121 ; 144 ; 169 ; 196 ; 225 et 625

- Encadrer $\sqrt{67}$.

67 est compris entre les carrés parfaits 64 et 81.
Donc, $\sqrt{64} < \sqrt{67} < \sqrt{81}$, autrement dit $8 < \sqrt{67} < 9$.

II – Calcul d'une longueur

Théorème de Pythagore
Si un triangle est rectangle,
alors le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Dans le triangle EDF rectangle en D, ED = 6 cm, DF = 8 cm.
➢ Calculer la longueur EF. *Pour faciliter le raisonnement, on fait un schéma à main levée.*

On sait que le triangle EDF est rectangle en D, son hypoténuse est [EF].
D'après le théorème de Pythagore, on a donc : raisonnement
$EF^2 = ED^2 + DF^2$

$EF^2 = 6^2 + 8^2$
$EF^2 = 36 + 64$
$EF^2 = 100$ calculs
$EF = \sqrt{100}$
$EF = 10$

Donc, EF mesure 10 cm. conclusion

Dans le triangle HIC rectangle en I,
HI = 3 cm, HC = 5 cm.
➢ Calculer la longueur IC.

Le triangle HIC est rectangle en I, son hypoténuse est [HC].
D'après le théorème de Pythagore, on a donc :
$IC^2 = HC^2 - HI^2$
$IC^2 = 25 - 9$
$IC^2 = 16$
$IC = \sqrt{16}$
$IC = 4$ Donc, IC mesure 4 cm.

III – Montrer qu'un triangle est rectangle ou non

Test de Pythagore

- Réciproque du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle.

- Contraposée du théorème de Pythagore

Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.

Remarque : Par abus de langage, « la contraposée d'un théorème » sera aussi parfois appelée « théorème ».

Dans le triangle TAN, TA = 1,8 cm, TN =2,4 cm et AN = 3 cm.

➢ Montrer que TAN est un triangle rectangle.

Le triangle TAN peut être rectangle en T.
On sait que :
• $AN^2 = 3^2 = 9$
• $AT^2 + TN^2 = 1,8^2 + 2,4^2 = 3,24 + 5,76 = 9$
Ainsi : $AN^2 = AT^2 + TN^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore,
on a donc : TAN est un triangle rectangle en T.

OU

Si le triangle TAN était rectangle en T, on aurait :
$AN^2 = AT^2 + TN^2$. Or :
• $AN^2 = 3^2 = 9$
• $AT^2 + TN^2 = 1,8^2 + 2,4^2 = 3,24 + 5,76 = 9$
Ainsi : $AN^2 = AT^2 + TN^2$
L'égalité de Pythagore est vérifiée,
donc : TAN est un triangle rectangle en T.

Dans le triangle PIO, PO = 15 cm, PI = 8,8 cm et OI = 12,2 cm.

➢ PIO est-il un triangle rectangle ?

Le triangle POI peut être rectangle en I.
On sait que :
• $PO^2 = 15^2 = 225$
• $PI^2 + IO^2 = 8,8+12,2^2 = 77,44+148,84 = 226,28$
Ainsi : $PO^2 \neq PI^2 + IO^2$
D'après le théorème de Pythagore,
on a donc : POI n'est pas un triangle rectangle.

OU

Si le triangle POI était rectangle en I, on aurait :
$PO^2 = PI^2 + IO^2$. Or :
• $PO^2 = 15^2 = 225$
• $PI^2 + IO^2 = 8,8+12,2^2 = 77,44+148,84 = 226,28$
Ainsi : $PO^2 \neq PI^2 + IO^2$
L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée,
donc : POI n'est pas un triangle rectangle.

Attention : on ne peut pas utiliser le théorème de Pythagore et sa réciproque dans un même triangle.

La Villette